

NO Calculs avec les fractions : addition et soustraction

Objectifs :

- Travailler avec les différentes représentations des nombres rationnels
- Comprendre la notion de « fraction »
- Être capable de transformer l'écriture d'un nombre rationnel en une autre écriture
- Être capable d'effectuer une addition ou une soustraction de deux ou plusieurs fractions
- Être capable de résoudre différents problèmes liés aux fractions

Pour commencer, prends connaissance des éléments théoriques concernant les fractions en page 27 à 30 de ton Aide-mémoire.

Des compléments ainsi que des exercices te seront proposés tout au long des pages à venir. Les corrigés des exercices se trouvent à la fin du document (pages 9 à 12).

Définitions

Définition 1

Une fraction est le rapport de deux nombres relatifs écrit sous forme fractionnaire : $\frac{a}{b}$. En remplaçant a et b par des nombres entiers relatifs, on peut dire, par exemple, que : $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{15}$ sont des fractions.

Attention : Une écriture fractionnaire n'est pas une fraction. C'est le rapport de deux nombres quelconques écrit sous forme fractionnaire.

Exemples d'écritures fractionnaires qui ne sont pas des fractions : $\frac{2,4}{5}$; $\frac{(-1,4)^4}{\sqrt{7}}$; $\frac{3}{-1,4}$

Définition 2

Dans une fraction, le nombre écrit au-dessus de la barre de fraction s'appelle le numérateur et le nombre écrit au-dessous de la barre de fraction s'appelle le dénominateur :

$\frac{2}{5}$

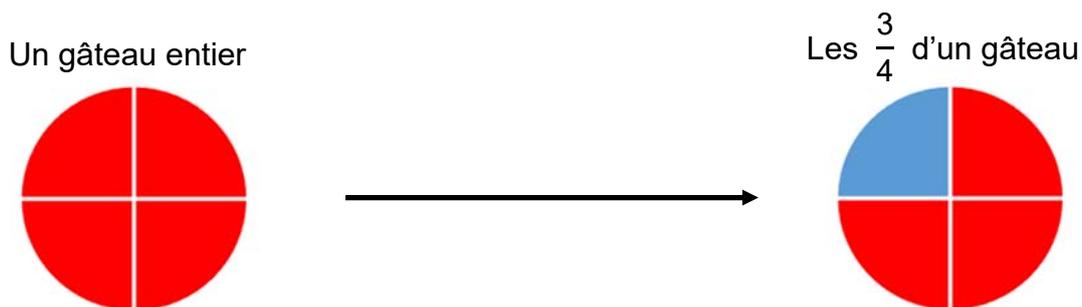
← Numérateur

← Dénominateur

Définition 3

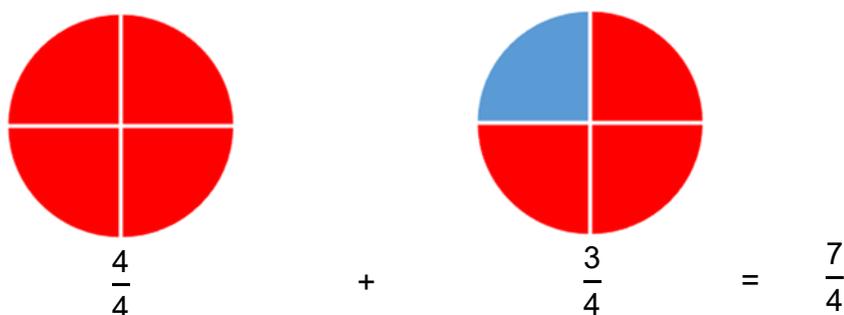
De manière moins arithmétique, on peut également définir une fraction comme étant une partie, un morceau d'un tout, d'un ensemble, d'un entier. On dit alors que l'entier, le tout représente 1 et que la fraction représente une partie de ce tout.

Exemple 1 : Les $\frac{3}{4}$ d'un gâteau signifie qu'on a coupé un gâteau (l'entier) en 4 parties égales et qu'on s'intéresse à 3 parties (en rouge) sur les 4.



Exemple 2 : Les $\frac{7}{4}$ d'un gâteau est une autre situation plus complexe à comprendre.

On coupe un gâteau en 4 parties égales et on s'intéresse à 7 parties (en rouge) sur les 4. Dans ce cas, on doit considérer un 2^{ème} gâteau pour obtenir au moins 7 parties. En comptant chaque partie rouge, on arrivera à sept quarts : Un quart, deux quarts, trois quarts, quatre quarts (1 gâteau entier), cinq quarts, six quarts et, enfin, sept quarts.



Amplification et simplification d'une fraction

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre entier non nul, on obtient une nouvelle fraction qui est égale à la première. On effectue alors une **amplification**.

Exemple : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{7}{21} = \frac{100}{300}$

Dans cet exemple, la fraction de départ a été multipliée par différents nombres entiers non nuls, par exemple : 2 ; 7 ; 100 . Toutes ces fractions sont donc égales.

Si on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un diviseur commun au numérateur et dénominateur, on obtient une nouvelle fraction qui est égale à la première. On effectue alors une **simplification**.

Exemple :
$$\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Dans cet exemple, la fraction de départ a été divisée une première fois par 2 et, ensuite, de nouveau par 2. On aurait pu simplifier la première fraction tout de suite par 4 pour trouver la réponse finale.

Ces 3 fractions sont donc égales.

Lorsqu'on ne peut plus simplifier, on dit que la fraction est « irréductible ».

Addition et soustraction de fractions

Pour additionner ou soustraire deux fractions, on procède en deux étapes :

1^{ère} étape : On amplifie ou simplifie les 2 fractions pour qu'elles aient le même dénominateur. Si elles ont déjà le même dénominateur, on peut tout de suite passer à l'étape 2.

2^{ème} étape : On additionne ou on soustrait les 2 numérateurs et on conserve le même dénominateur (dénominateur commun) dans la réponse finale.

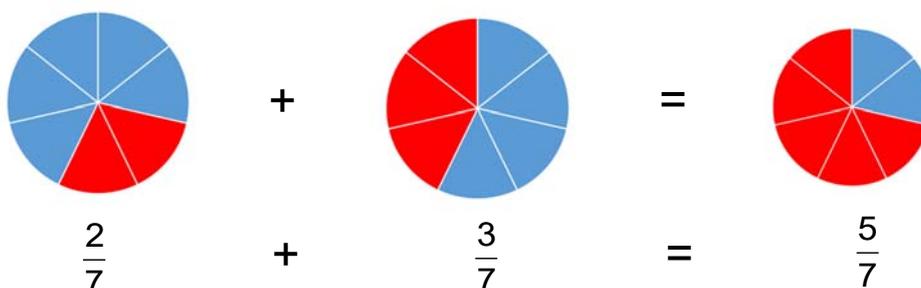
Exemple 1 : Les 2 fractions ont déjà le même dénominateur.

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

On additionne 2 et 3 pour trouver 5 au numérateur de la réponse finale.

On réécrit le dénominateur commun qui est 7 dans la réponse finale.

Exemple 1 sous forme de parties d'un tout



Exemple 2 : Les 2 fractions ont des dénominateurs différents.

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{8}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8+5}{10} = \frac{13}{10}$$

Amplification par 2

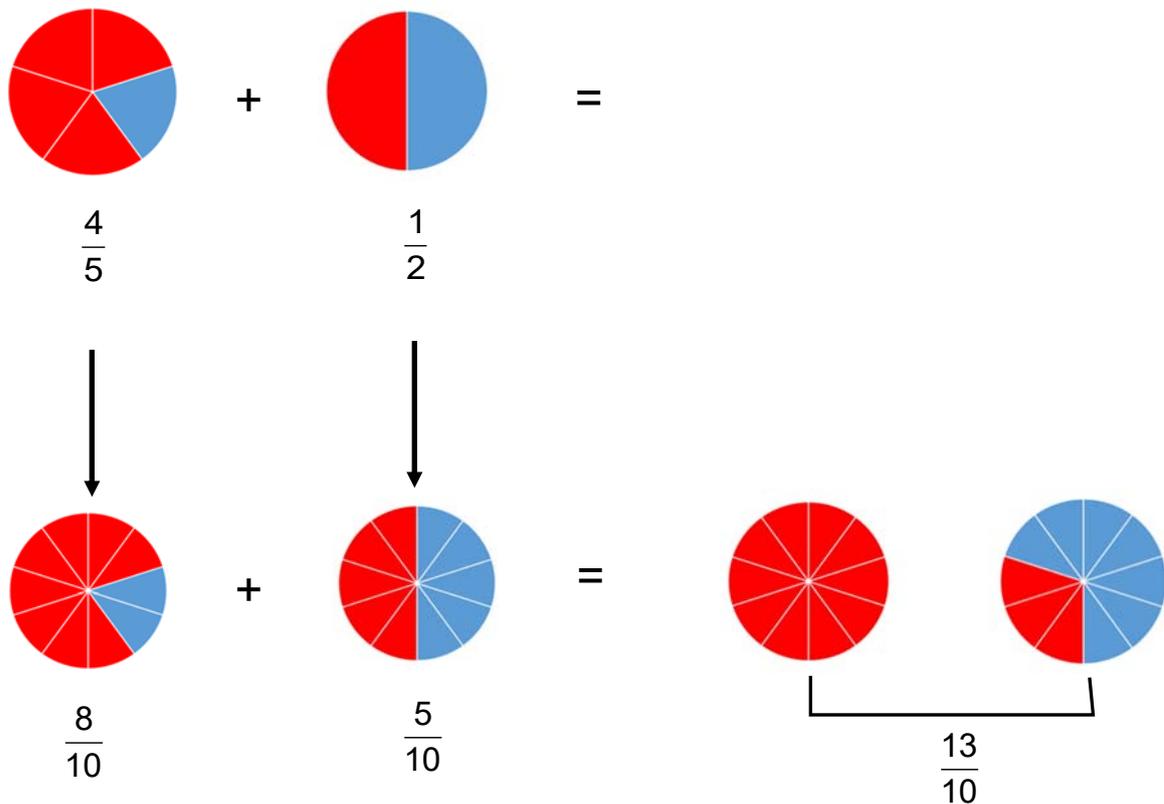
Amplification par 5

Le plus petit dénominateur commun de 5 et 2 est 10.

Donc, on amplifie la 1^{ère} fraction par 2 et la 2^{ème} par 5. On a ainsi 8 sur 10 et 5 sur 10.

On peut maintenant appliquer la 2^{ème} étape et trouver la réponse finale.

Exemple 2 sous forme de parties d'un tout



Remarque : Avant d'effectuer une addition ou une soustraction de deux fractions, on essaie de les rendre irréductibles afin de faciliter les calculs.

$$\frac{19}{38} + \frac{13}{39} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Exemple : Pour la 1^{ère} fraction, 19 et 38 sont simplifiés par 19 et pour la 2^{ème} fraction, 13 et 39 sont simplifiés par 13.

Exercices et problèmes d'application

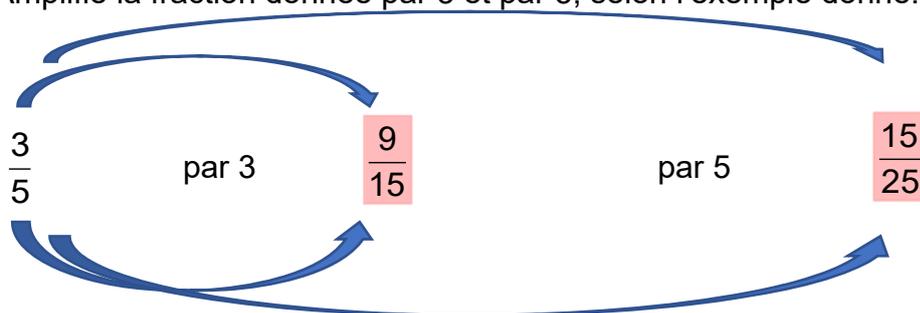
Exercice 1 :

Complète le tableau ci-dessous.

Ecriture décimale	Ecriture fractionnaire
0,125	
	$\frac{7}{10}$
	$\frac{2}{3}$
1,6	

Exercice 2 :

Amplifie la fraction donnée par 3 et par 5, selon l'exemple donné.



$\frac{1}{4}$ par 3 par 5

$\frac{7}{8}$ par 3 par 5

$\frac{4}{3}$ par 3 par 5

$-\frac{2}{9}$ par 3 par 5

Exercice 3 :

Rends les fractions suivantes irréductibles.

$$\frac{12}{16} =$$

$$\frac{60}{120} =$$

$$\frac{24}{52} =$$

$$\frac{28}{60} =$$

$$\frac{14}{21} =$$

$$\frac{8000}{7200} =$$

Exercice 4 :

Effectue ces additions et/ou soustractions de fractions et donne tes réponses sous forme de fraction irréductible.

$$\frac{1}{8} + \frac{6}{8} =$$

$$\frac{1}{21} + \frac{2}{21} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{9}{4} - \frac{7}{8} =$$

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$$

Exercice 4 (suite) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{5}{12} =$$

$$\frac{6}{18} - \frac{25}{40} + \frac{9}{27} =$$

$$1,2 + \frac{1}{15} + \frac{45}{90} =$$

Exercice 5 :

Sophie a dépensé les $\frac{3}{4}$ de son argent de poche pour des habits et un sixième pour un kebab. Une fois à la maison, elle constate qu'il lui reste 5 francs dans sa poche. Combien avait-elle d'argent au début de la journée ?

Exercice 6 :

NO225 Relief suisse

La Suisse occupe une superficie d'environ 40 000 km², répartie en trois régions.

Les trois cinquièmes se trouvent dans les Alpes et les trois dixièmes dans le Moyen-Pays.

Quelle est la superficie du Jura, qui constitue la troisième grande région de la Suisse ?

Exercice 7 :

NO226 Au-dessous de la moyenne

Lors de la dernière évaluation de mathématiques, deux tiers des élèves de la classe ont obtenu une note d'au moins 4,5 et deux neuvièmes une note de 4.

Tous les autres élèves ont obtenu une note inférieure à 4.

Quelle fraction des élèves de la classe représente cette dernière catégorie ?

NO Calculs avec les fractions – corrigés

Exercices et problèmes d'application

Exercice 1 :

Complète le tableau ci-dessous.

Ecriture décimale	Ecriture fractionnaire
0,125	$\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$
0,7	$\frac{7}{10}$
$0,\bar{6}$	$\frac{2}{3}$
1,6	$\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

Exercice 2 :

Amplifie les fractions suivantes par 3 et, ensuite, 5.

$$\frac{1}{4} \quad \text{par 3} \quad \frac{3}{12} \quad \text{par 5} \quad \frac{5}{20}$$

$$\frac{7}{8} \quad \text{par 3} \quad \frac{21}{24} \quad \text{par 5} \quad \frac{35}{40}$$

$$\frac{4}{3} \quad \text{par 3} \quad \frac{12}{9} \quad \text{par 5} \quad \frac{20}{15}$$

$$-\frac{2}{9} \quad \text{par 3} \quad -\frac{6}{27} \quad \text{par 5} \quad -\frac{10}{45}$$

Exercice 3 :

Rends les fractions suivantes irréductibles.

$$\frac{12}{16} =$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{60}{120} =$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{24}{52} =$$

$$\frac{6}{13}$$

$$\frac{28}{60} =$$

$$\frac{7}{15}$$

$$\frac{14}{21} =$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{8000}{7200} =$$

$$\frac{10}{9}$$

Exercice 4 :

Effectue ces additions et/ou soustractions de fractions et donne tes réponses sous forme de fraction irréductible.

$$\frac{1}{8} + \frac{6}{8} =$$

$$\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{21} + \frac{2}{21} =$$

$$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} =$$

$$\frac{7}{14} + \frac{6}{14} = \frac{13}{14}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{7}{8} =$$

$$\frac{18}{8} - \frac{7}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{30}{12} - \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}$$

Exercice 4 (suite) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{30}{60} + \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{77}{60}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{5}{12} =$$

$$\frac{18}{12} - \frac{4}{12} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{6}{18} - \frac{25}{40} + \frac{9}{27} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{8}{24} - \frac{15}{24} + \frac{8}{24} = \frac{1}{24}$$

$$1,2 + \frac{1}{15} + \frac{45}{90} =$$

$$\frac{12}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2} = \frac{36}{30} + \frac{2}{30} + \frac{15}{30} = \frac{53}{30}$$

Exercice 5 :

Sophie a dépensé les $\frac{3}{4}$ de son argent de poche pour des habits et un sixième pour un kebab. Une fois à la maison, elle constate qu'il lui reste 5 francs dans sa poche. Combien avait-elle d'argent au début de la journée ?

Elle a dépensé : $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ de son argent :

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Elle a donc dépensé $\frac{11}{12}$ de son argent.

Il lui reste donc $\frac{1}{12}$ de son argent.

Comme $\frac{1}{12}$ de toute la somme correspond à 5 francs, $\frac{12}{12}$, soit tout son argent, correspond à 12 fois 5 francs, soit la somme de 60 francs.

Sophie avait 60 frs au début de la journée.

Illustration à l'aide d'un schéma :



Exercice 6 :

NO225 Relief suisse

La Suisse occupe une superficie d'environ 40 000 km², répartie en trois régions.

Les trois cinquièmes se trouvent dans les Alpes et les trois dixièmes dans le Moyen-Pays.

Quelle est la superficie du Jura, qui constitue la troisième grande région de la Suisse ?

Les $\frac{3}{5}$ + les $\frac{3}{10}$ + le Jura = 1 = Toute la Suisse

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{10} + \frac{?}{?} = 1 \quad \xrightarrow{\text{Même dénominateur}} \quad \frac{6}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1 = \frac{10}{10}$$

Les Alpes Le Moyen-Pays Le Jura

La fraction manquante pour avoir « le tout » représente le $\frac{1}{10}$ de toute la Suisse.

Pour trouver le $\frac{1}{10}$ de 40'000 km², il faut diviser 40'000 par 10.

Donc, le Jura a une superficie de 4'000 km².

Exercice 7 :

NO226 Au-dessous de la moyenne

Lors de la dernière évaluation de mathématiques, deux tiers des élèves de la classe ont obtenu une note d'au moins 4,5 et deux neuvièmes une note de 4.

Tous les autres élèves ont obtenu une note inférieure à 4.

Quelle fraction des élèves de la classe représente cette dernière catégorie ?

Les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{2}{9}$ de la classe représentent les $\frac{8}{9}$ de la classe : $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

Il reste donc $\frac{1}{9}$ de la classe.