Une tablette babylonienne

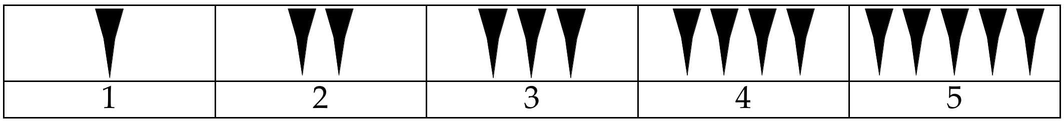
Il y a près de quatre mille ans, un apprenti scribe babylonien a rédigé cette tablette.

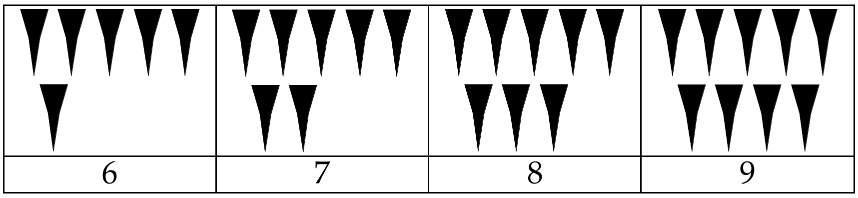
Exercice

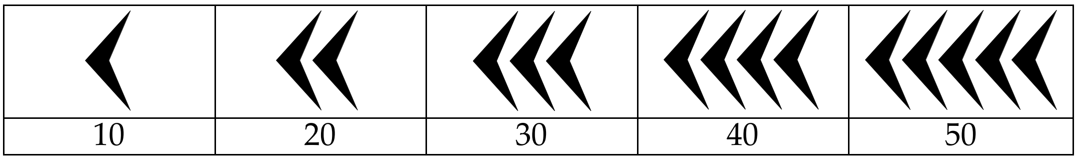
Identifier quelques uns des éléments les plus importants de cette tablette.

La numération babylonienne : de 1 à 59

Les Babyloniens utilisaient le système suivant pour écrire les nombres.

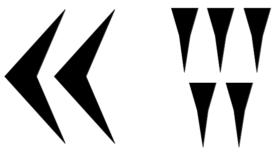






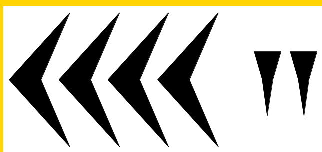
Le signe qui désigne le nombre 1 est appelé « clou », le signe qui désigne 10 est appelé « chevron ».

Pour écrire les nombres de 1 à 59, on dispose des clous et des chevrons comme dans l'exemple suivant du nombre 25 (les clous peuvent être disposés de différentes manières) :



Exercices

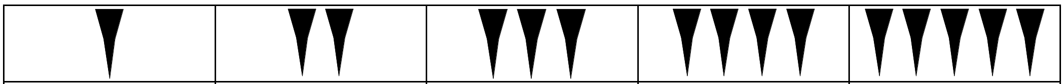
1) Écrire dans notre système de numération la valeur de chacun des nombres suivants :



2) Écrire à la façon des Babyloniens les nombres suivants : 11, 53, 47, 30, 29.

La numération babylonienne : 60 et au-delà

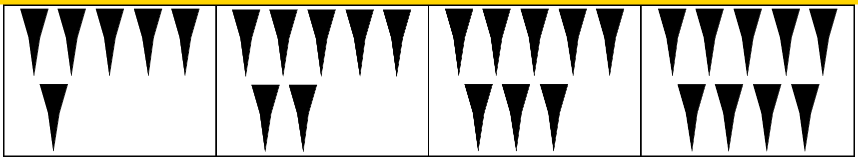
Pour écrire les nombres à partir de 60, les Babyloniens utilisaient à nouveau des clous.



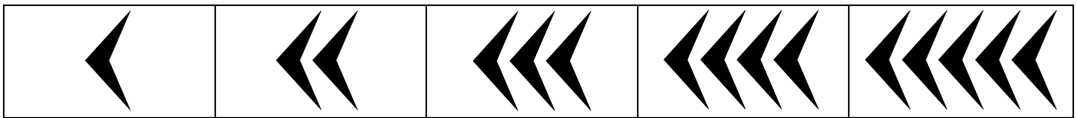
60	120	180	240	360

Exercice

Remplir les cases du tableau ci-dessus.

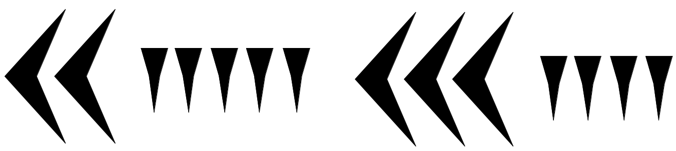


Pour les nombres encore plus grands, les Babyloniens utilisaient à nouveau les chevrons.



600	1200	1800	2400	3000

Par exemple, le nombre 1534 s'écrit :

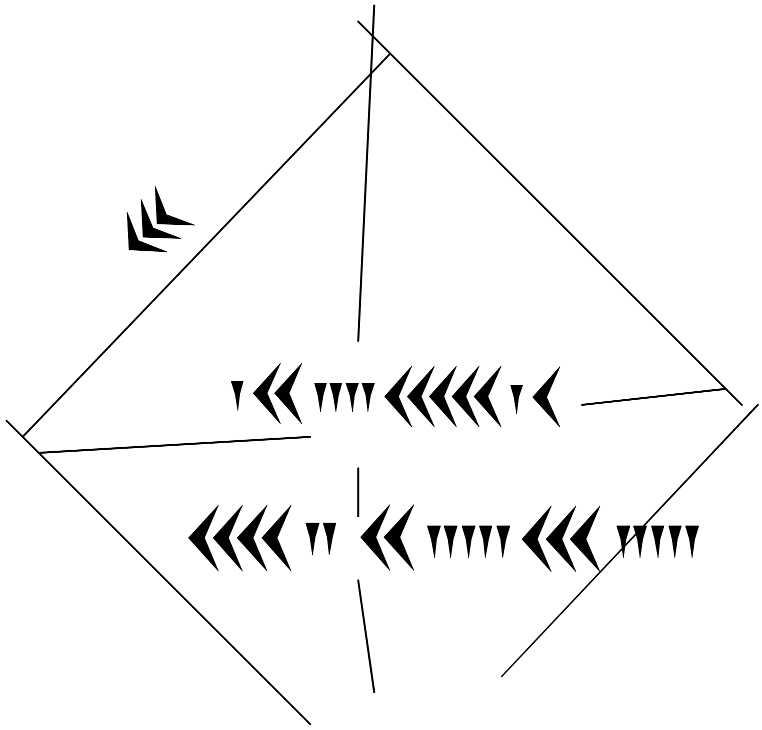


Exercices

1) Expliquer pourquoi 1534 s'écrit bien de cette manière pour les Babyloniens.
2) Écrire en numération babylonienne le nombre 672.
3) Écrire le nombre 61 en numération babylonienne. En déduire un inconvénient possible de ce système de notation des nombres. Comment y remédier ?
4) Quels sont les avantages du système babylonien ?
5) Comment les Babyloniens écrivaient-ils le nombre 3600 ?

La tablette traduite

Voici une version plus lisible du contenu de la tablette de la fiche n°1.

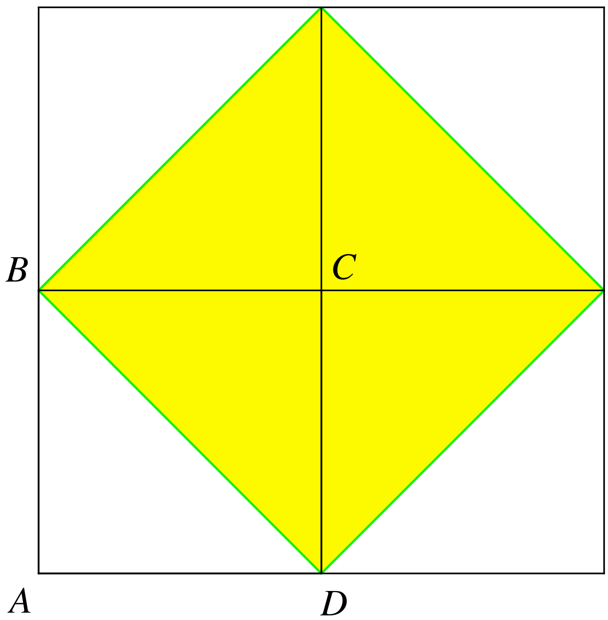


Exercices

1) Identifier les nombres qui sont représentés sur la tablette.
2) Comment peut-on les relier les uns aux autres ?
3) L'un des trois nombres est de nature différente des deux autres : lequel ? Pourquoi ?

La diagonale du carré

On considère un carré et l'une de ses diagonales. On cherche à savoir combien de fois cette diagonale est plus grande que le côté. Pour cela, on utilise la figure suivante.



Le carré *ABCD* étant donné, on construit un carré (jaune) dont le côté est égal à *BD*. On complète la figure avec trois autres carrés identiques à *ABCD*.

Exercice

1) Déterminer le rapport des aires entre le carré jaune et le carré *ABCD*.

2) Supposons le carré *ABCD* d'aire 1. Quelle est l'aire du carré jaune ? En déduire la longueur *BD*.

Évaluation de √2 par dichotomie

On se propose de déterminer la valeur de √2. Pour cela, on raisonne de proche en proche pour atteindre de plus en plus de décimales.

Exercices

1) Calculer 1^2 et 2^2. En déduire que √2 est entre 1 et 2.

2) Calculer $(1,5)^2$. A-t-on $\sqrt{2} > 1,5$ ou $\sqrt{2} < 1,5$?

3) Calculer $(1,3)^2$, puis $(1,4)^2$. En déduire le premier chiffre après la virgule de √2.

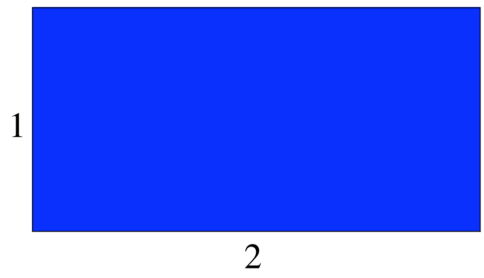
4) Proposer une méthode pour déterminer le deuxième chiffre après la virgule de √2.

5) Comment organiser au mieux un travail de groupe pour calculer le plus vite possible par cette méthode les décimales successives de √2 ?

6) Trouver par cette méthode un maximum de décimales de √2.

Évaluation de √2 par une méthode babylonienne

Soit un rectangle de côtés 1 et 2.



L'objectif est de modifier les dimensions de ce rectangle pour le faire ressembler de plus en plus à un carré, sans changer la valeur de son aire.

Exercices

0) Quelle est l'aire A du rectangle précédent ?

1) Calculer la moyenne m de la longueur et de la largeur de ce rectangle.

2) Soit un rectangle d'aire A et dont l'un des côtés mesure m. Quelle est la longueur m' de son autre côté ?

3) Dessiner un rectangle de côtés m et m'. Ressemble-t-il plus à un carré que le rectangle de côtés 1 et 2 ?

4) Calculer la moyenne n de m et de m'.

5) Soit un rectangle d'aire A et dont l'un des côtés mesure n. Quelle est la longueur n' de son autre côté ?

6) Dessiner un rectangle de côtés n et n'. Est-il facile de voir à l'œil nu la différence avec un carré ?

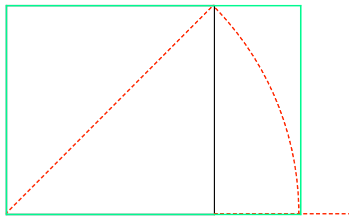
7) En déduire que n et n' sont proches de √2.

8) À partir de ce qui précède, proposer une méthode pour déterminer les décimales de √2.

9) Comparer cette méthode avec la méthode de dichotomie utilisée dans la fiche n°6 : laquelle est la plus rapide ?

Le rectangle diagonal et le format A4

La construction suivante est destinée à tracer, à partir d'un carré, un « rectangle diagonal », c'est-à-dire un rectangle dont le rapport longueur/largeur est égal à $\sqrt{2}$.



Exercice

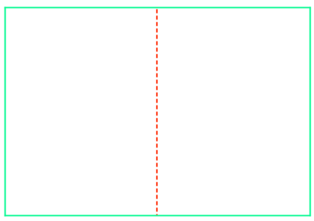
Décrire le procédé géométrique à mettre en œuvre pour construire un rectangle diagonal, puis construire un tel rectangle.

Le format usuel des feuilles de papier, dit format A4, est celui d'un rectangle de largeur 21 cm et de longueur 29,7 cm.

Exercice

Montrer par un calcul que le rectangle du format A4 est un rectangle diagonal.

Prenons une feuille au format A4 et plions-là en deux comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Exercices

1) Mesurer le rapport longueur/largeur pour l'un des petits rectangles obtenus par ce pliage d'une feuille au format A4. Que constate-t-on ?

2) Plier en deux une feuille au format A4 donne deux petites feuilles au format A5. En pliant en deux une feuille au format A5, on définit le format A6. Comment est défini le format A3 ? le format A2 ? le format A1 ? le format A0 ?

3) Évaluer l'aire du rectangle définissant le format A4. En déduire l'aire du rectangle A0.

√2 est-elle un nombre décimal ?

Un nombre est dit *décimal* s'il s'écrit avec une quantité finie de chiffres après la virgule. Par exemple, le nombre 24,5, le nombre 12 et le nombre 34,2876 sont des nombres décimaux.

Exercices

1) Donner d'autres exemples de nombres décimaux.
2) Les nombres 24/3, 25/8 et 150/10 sont-ils décimaux ?
3) Le nombre 1/3 est-il décimal ? Pourquoi ?

Commençons par quelques remarques générales sur les nombres décimaux.

Exercices

0) Taper « √2 » sur une machine à calculer. Que constate-t-on ? Peut-on en déduire que √2 n'est pas un nombre décimal ?

1) Multiplier le nombre décimal 1,37 par lui-même. Comparer le dernier chiffre du résultat avec le dernier chiffre de la multiplication de 7 par lui-même.

2) Même question avec le nombre 3,52 et le dernier chiffre du résultat avec celui de la multiplication de 2 par lui-même.

3) Un exercice demande de calculer $2{,}31^2$. Un élève propose la réponse 5,3365. Montrer que cet élève s'est trompé, sans refaire complètement le calcul.

À l'aide de ce qui précède, nous allons déterminer si √2 est oui ou non un nombre décimal.

Exercices

1) Supposons que √2 soit un nombre décimal. Son dernier chiffre peut-il être égal à 1 ? Pourquoi ?

2) De même, déterminer si le dernier chiffre de √2 pourrait être égal à 2, à 3, etc., jusqu'à 9.

3) Conclure.

Structure des décimales de √2

Nous savons à présent que √2 possède une infinité de chiffres après la virgule. On aimerait maintenant en savoir un peu plus sur ces chiffres et leur répartition.

Exercices

1) Avec une machine à calculer, déterminer les premières décimales des nombres 1/3, 22/7, 11/9 et 8/11.

2) Que constate-t-on de commun à tous ces résultats ?

3) Poser la division de 22 par 7. Expliquer pourquoi il est inévitable qu'au bout d'un certain temps les chiffres se répètent indéfiniment.

On se pose maintenant la question de savoir si les décimales de √2 possèdent la même propriété. La question, difficile, fait l'objet des exercices suivants et de la fiche suivante.

Exercices

1) Soit le nombre $x = 1{,}212121212121\ldots$ dont l'expression décimale est constituée d'une infinité de « 12 » à la suite les uns des autres.

2) Montrer que $100x = 120+x$.

3) En déduire que x s'écrit sous la forme d'une fraction.

4) Expliquer comment généraliser ce résultat à tous les nombres dont l'écriture décimale est composée d'un même motif qui se répète indéfiniment.

On qualifie de « périodique » une expression décimale composée de la répétition perpétuelle d'une même séquence de chiffres. Les exercices précédents permettent de démontrer le résultat suivant :

Les nombres dont l'écriture décimale est périodique sont ceux qui s'écrivent sous la forme d'une fraction (c'est-à-dire sous la forme p/q, où p et q sont des entiers).

Pour savoir si les décimales de √2 sont constituées d'un même « motif » qui se répète perpétuellement, il faut donc savoir si √2 peut s'écrire sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire s'il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$. Cette question fait l'objet de la fiche de travail suivante.

√2 est-elle une fraction ?

Une fraction est dite *irréductible* s'il n'est pas possible de remplacer son numérateur et son dénominateur par des nombres plus petits. Par exemple, 3/5, 11/8 ou encore 23/16 sont des fractions irréductibles.En revanche, 8/6 n'est pas irréductible, car on a 8/6 = 4/3. Notons que 4/3, elle, est irréductible : c'est la *forme irréductible* du nombre 8/6. Il n'est pas très difficile de se persuader que toute fraction possède une forme irréductible (et une seule).

Exercice

Parmi les fractions suivantes, déterminer celles qui sont irréductibles et celles qui ne le sont pas. Pour ces dernières, donner leur forme irréductible : 11/4, 35/14, 10/6, 45/12, 13/12.

Une fraction irréductible p/q étant donnée, considérons son carré : on a $(p/q)^2 = p^2/q^2$. Nous allons nous intéresser à cette dernière fraction.

Exercice

Pour chaque fraction de l'exercice précédent, déterminer si la fraction élevée au carrée est irréductible ou non.

On peut démontrer en toute rigueur que ce qui s'observe dans les cas particuliers précédents est général, autrement dit :

Si une fraction est irréductible, alors son carré l'est aussi.

Ce résultat est utilisé dans le raisonnement suivant.

Exercices

1) Supposons trouvée une fraction p/q, sous forme irréductible, égale à √2. À quoi est égale la fraction p^2/q^2 ?

2) En déduire que $p^2 = 2$ et que $q^2 = 1$.

3) En déduire qu'il n'est pas possible de trouver p, et donc que √2 ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.

Le fait que √2 ne s'écrive pas sous forme de fraction fait de √2 un nombre dit « irrationnel ». D'après ce qui a été vu à la fiche précédente, la suite de ses décimales n'est donc pas la répétition perpétuelle d'une même séquence de chiffres.

Analyse des premières décimales de √2

Voici les mille premiers chiffres après la virgule de √2 (le 1 avant la virgule ne compte pas).

√2 = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379
99073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605585073721
26441214970999358314132226659275055927557999505011527820605714701095599716059
70274534596862014728517418640889198609552329230484308714321450839762603627
99525140798968725339654633180882964062061525835239505474575028775996172983
55752203375318570113543746034084988471603868999706990048150305440277903164
54247823068492936918621580578463111596668713013015618568987237235288509264
861249497715421833420428568606014682472077143585487415565706967765372022648
544701585880162075847492265722600208558446652145839889394437092659180031138
824646815708263010059485870400318648034219489727829064104507263688131373985
525611732204024509122770022694112757362728049573810896750401836986836845072
579936472906076299694138047565482372899718032680247442062926912485905218100
445984215059112024944134172853147810580360337107730918286931471017111168391
6581726889419758716582152128229518488472…

On s’intéresse au nombre de fois qu’apparaît chaque chiffre dans ces mille décimales, c’est-à-dire le nombre de fois qu’apparaît le chiffre 0, le chiffre 1, le chiffre 2, etc.

Exercices

1) Réfléchir soigneusement à une organisation efficace pour compter rapidement le nombre de fois qu’apparaît chaque chiffre.

2) Une fois cette organisation trouvée, faire un tableau indiquant le nombre de fois qu’apparaît chaque chiffre.

3) Vérifier que le nombre total de chiffres comptés est bien égal à 1000. Si tel n’est pas le cas, recommencer.

4) Quel est le chiffre qui apparaît le plus souvent ? le moins souvent ? Peut-on en tirer une conclusion sur les décimales qui viennent après les mille premières ?